数理の窓

宇宙を超える数

100号記念につき、数はどこまで続くか、巨大な数について考えたい。

漢字文化圏では数の桁には名前がついており、兆、京、垓、…、那由他、不可思議と続き、最後は無量大数となる。指数表記するならば、10^{68}である。また、西欧圏では10の100乗、Googol＝10^{100}がある。宇宙全体の素粒子の数は10^{80}個と言われているため、素粒子1つ1つに数字を書いたとしてもまだGoogolまで達しない。さらに仏教世界には、不可説不可説転と呼ばれる10の7×2^{122}乗＝$10^{3721838388197764444130659768784964 8128}$が、経典最大の数として登場する。

ところが、数学の世界では、これらよりもはるかに大きく“数学的な意味をもつ”数がある。グラハム問題[1]と呼ばれる組合せ論の問題で、この証明中に出てくるグラハム数である。この数は、これまでの数学記号だけではうまく表せないため、クヌース矢印「↑」と呼ばれる“新しい演算記号”を定義して表記する。

3↑↑4は、3の3乗の3乗の3乗（3の3乗を3回繰返す）で、$3^{7625597484987}$である。さらに、3↑↑↑3は、再帰的に3↑↑3を3回繰返す操作であり、3↑↑3↑↑3↑↑3↑↑3＝3↑（3↑3の27乗）と同じになる。数にすると3の10兆乗の10兆乗程度となる。ここですでに、不可説不可説転さえ軽く超えている。さらに、↑を一本増やすと、3↑↑↑3を3の10兆乗の10兆乗回繰り返すことを意味し、この操作をさらに63段階繰返すと、グラハム数[2]となる。ここまでくると、指数表記でさえ宇宙全体を使っても書くことができない。数の演算の有限回操作を定義し、それを繰返し続けていくとどうなるか想像することによってのみ、宇宙を超えられるのだ。

クヌース矢印のような、数を少数の記号と形式で表す工夫は、古よりなされている。とくに10進法は、位とりと空“＝0”により、すべての数を10個の記号で表す発明だ。そして、巨大な数の計算技術は、兆や京単位の数を扱う金融世界の重要なインフラとなっている。

ところで、子供達はよく声に出して100まで数えるが、いつか、数え終わらない大きな数を知る。そして、数は無限に続くことを知った時に、人の時間が有限なことを理解するのだろう。

（外園 康智）

1）グラハム問題とは、n次元超立方体の2^n個の頂点を互いに全て線で結ぶ。次に連結した線を赤か青のどちらかの色に塗り分ける。このとき、少なくともグラハム数以上のnであれば、どんな塗り方をしても、同一平面上にある四点を結ぶ線の中で、全て赤もしくは青のものが存在する。

2）グラハム数を紙面にて表記することは難しいため、正確な定義ができていないことをご了承下さい。

野村総合研究所　金融ITイノベーション研究部